

Quantidade Conservada $\rightarrow$ dizemos que uma certa quantidade em um sistema é conservada quando sua derivada temporal é nula.

$$C = C(\vec{r}_i, \vec{v}_i) ; C \text{ é conservada se } \dot{C} = \frac{dC}{dt} = 0$$

$$\vec{C} = \vec{C}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) ; \vec{C} \text{ é conservada se } \dot{\vec{C}} = \frac{d\vec{C}}{dt} = 0$$

Momento Linear: $\vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$

Teorema: $\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \stackrel{2^{\text{a}} \text{ Lei}}{=} \sum \vec{F} \Rightarrow \text{se } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

Agora, analisando o mesmo caso para um sistema de N -partículas; podemos definir o momento do sistema como sendo a soma de todos os momentos: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Teorema: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \stackrel{2^{\text{a}} \text{ Lei}}{=} \sum_i \left(\sum_m \vec{F}_i^{\text{ext}, m} + \sum_j^{N-1} \vec{F}_{ij} \right)$

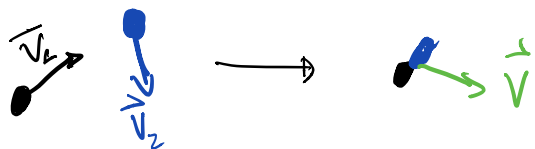
força externa ao sistema forças internas das partículas

$\rightarrow$ Note que ao somar em j e i estamos somando os termos $\vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{2(1)} + \dots$ ou seja, somando pares de forças de ação e reação; pela 3ª Lei $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ portanto o termo referente as forças internas é nulo.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \Rightarrow \text{se } \sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ forças internas não contribuem para a variação do momento.

Ex: Dois corpos, movendo-se com velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ respectivamente, chocam-se e após a colisão começam a se movimentar junto com velocidade $\vec{v}$. Desenhando uma representação do problema teríamos:



Pensando no sistema constituído apenas dessas 2 partículas, temos que a força externa sobre o sistema é nula. Acreditando então na conservação do momento do sistema, em outras palavras temos:

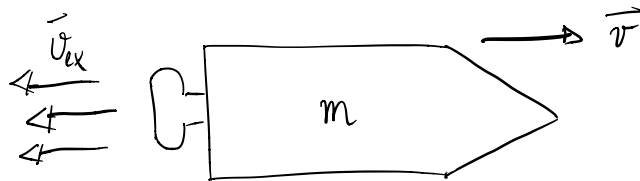
$$\vec{P}_{antes} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{P}_{depois} = m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

$$\text{Como } \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{antes} = \vec{P}_{depois} \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Exemplo: Foguetes: Imaginem agora a situação de foguetes se locomovendo no espaço sideral, sem a presença de nenhuma força. Como isso é possível? Graças a conservação do momento e da 3ª Lei de Newton. A fim de se locomover para frente (pensando somente em uma direção) o foguete ejeta uma parte de sua massa p/ trás, logo, o foguete aplica uma força na massa ejetada e essa aplica uma força no foguete, que o faz andar.



Digamos que um foguete se movimenta com velocidade $\vec{v}$ e expela parcelas de sua massa a uma velocidade $\vec{v}_{ex}$. Qual o momento do sistema? $P(t) = m v$, um instante $t + dt$ depois, o foguete terá expelido uma massa infinitesimal $|dm|$; logo:

$$P(t + dt) = (m + dm)(v + dv) + \vec{P}_{expelido}; \quad \vec{P}_{expelido} = \text{massa expelida} \cdot \text{velocidade da massa expelida (em relação ao solo)}$$

$$\Rightarrow P(t + dt) = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_{ex}) \quad \vec{P}_{expelido} = -dm(v - v_{ex})$$

Calculando a diferencial do momento agora:

$$dP = P(t + dt) - P(t) = (m + dm)(v + dv) - dm(v - v_{ex}) - mv$$

$$\Rightarrow dP = \cancel{m dv} + m dv + \cancel{dm v} + \underbrace{dm dv}_{=0} - \cancel{dm v} + dm v_{ex} \quad \underline{dP = m dv + dm v_{ex}}$$

Mas, como nosso sistema não possui uma força externa; o momento se conserva logo $dP=0$

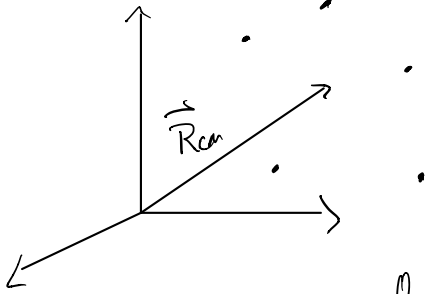
$$\Rightarrow m dv = - dm v_{ex}^* \rightarrow dv = - v_{ex} \frac{dm}{m} \Rightarrow v - v_0 = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Rightarrow v = v_0 + v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad m_0 \rightarrow \text{massa inicial do foguete (carga + combustível)}$$

* dividindo por dt : $m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} v_{ex} \Rightarrow m \dot{v} = - \dot{m} v_{ex}$ desempenha o papel de força - Propulsão

$\uparrow$ 2ª Lei de Newton

Centro de Massa: para um sistema de N -partículas, é definido como:



$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i^N m_i}$$

Ou seja, uma média ponderada das partículas que leva em conta a massa de cada partícula.

$$\vec{P} = \sum_i^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{M}{m} \sum_i^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \sum_i^N \left(\frac{m_i}{M} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = M \frac{d}{dt} \vec{R}_{cm} = \underline{M \vec{V}_{cm}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = M \vec{a}_{cm} = \sum_i^N \vec{F}_{ext}^i = M \ddot{\vec{R}}$$

Ou seja, temos que o CM move-se como se fosse exatamente uma partícula de massa M cuja somatória de forças age sobre ela. $\vec{R}$ se move justamente como uma partícula pontual, até mesmo no caso de corpos extensos.

Se por acaso a discussão mudasse de um conjunto discreto de partículas para um corpo extenso, conjunto contínuo de partículas, as somatórias, devidamente analisadas se transformariam em integrais: em outras palavras, o centro de massa de um corpo com uma certa densidade ρ será:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad \text{onde} \quad dm = \begin{cases} \lambda dl, & \text{linear} \\ \sigma ds, & \text{superficial} \\ \rho dv, & \text{volumétrica.} \end{cases}$$

Momento Angular: Da definição de momento angular de uma partícula temos:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$$

→ É interessante observar o seguinte: o momento angular depende do vetor posição, em outras palavras, depende da origem escolhida; diferentemente do momento linear.
 ↳ Velocidade depende do referencial, e não da origem do sistema de coordenadas.

Se derivarmos em relação ao tempo: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \equiv \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Em outras palavras, o momento angular será conservado se o torque ($\vec{\tau}$) sobre a partícula for nulo.

↳ Torque

→ geralmente descrito como a "forma rotacional da segunda lei de Newton"

Para o caso de N partículas, podemos definir o momento angular do sistema como sendo a soma do momento angular de cada partícula:

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}; \text{ se derivarmos:}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{d\vec{L}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}; \text{ onde } \vec{F}_{\alpha} \text{ é a força resultante sobre a partícula } \alpha.$$

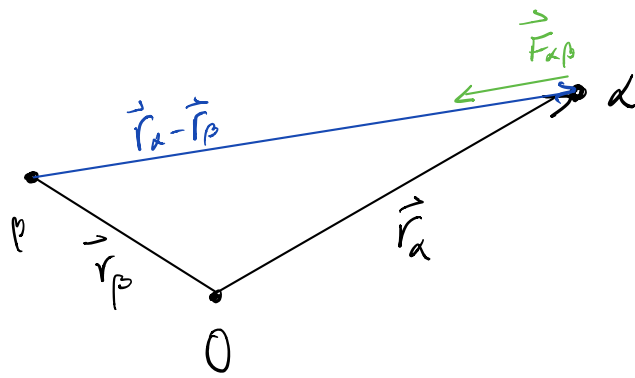
devemos levar em consideração as forças internas entre as partículas e as forças externas:

$$\vec{F}_{\alpha} = \sum_{p \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha p} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{p \neq \alpha} \left(\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha p} + \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right)$$

* Reorganizando de uma outra maneira temos: $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{p \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha p} = \sum_{\alpha} \sum_{p > \alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha p} + \vec{r}_p \times \vec{F}_{p\alpha})$

Pensando que essas forças internas obedeçam a 3ª lei: $\vec{F}_{\alpha p} = -\vec{F}_{p\alpha}$

⇒ $\sum_{\alpha} \sum_{p > \alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_p) \times \vec{F}_{\alpha p}$; Note agora o seguinte: $\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_p$ é um vetor que aponta da partícula p p/ a partícula α . Se por acaso trabalharmos c/ a hipótese que as forças internas são forças centrais teríamos a seguinte situação:
 ↳ Aponta ao longo da reta que liga duas partículas



$$\Rightarrow (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\alpha\beta} = 0$$

pois ambos os vetores estão sobre a mesma reta

Com isso temos: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{ext}$; logo, se todas as forças internas forem forças centrais, o momento angular do sistema se conserva se o torque externo for nulo.

Concomitantemente que o momento linear pode ser definido como $\vec{p} = m\vec{v}$; o momento angular pode ser definido como: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do corpo (que depende de alguma origem) e I é chamado de Momento de Inércia Resistência do corpo a rotação (análogo a massa)

Logo isso sempre é referente a um corpo girando em relação a um eixo fixo; tanto que ambas velocidade angular e momento de inércia dependem desse eixo.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \text{soma das massas de cada partícula multiplicada pela distância quadrada ao eixo de rotação.}$$

Ou ainda, p/ um corpo extenso:

$$I = \int r^2 dm$$

Energia:

Primeiramente, uma definição básica: a energia cinética de uma partícula com massa m e velocidade v é: $T = \frac{1}{2}mv^2$; podemos buscar essa variação no tempo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{1}{2}m \cdot 2v \dot{v} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = m\dot{v} \cdot v \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

multiplicando ambos os lados por dt temos: $\boxed{dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$; lembrando que $\vec{v} dt = d\vec{r}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r}$ é definido como o trabalho realizado pela força F durante um deslocamento $d\vec{r}$.

Ai está demonstrado o teorema trabalho-energia cinética, onde uma variação dT na energia cinética corresponde justamente ao trabalho realizado. Podemos transformar essa quantidade em algo contínuo a medida que $d\vec{r} \rightarrow 0$ e somando sobre toda uma trajetória:

$$\Delta T = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv W_{1 \rightarrow 2} \quad ; \quad \text{vale lembrar que isso corresponde a uma integral de linha da força } \vec{F} \text{ ao longo de um caminho.}$$

$W_{1 \rightarrow 2}$ corresponde ao trabalho realizado pela força $\vec{F}$ de $\vec{r}_1$ até $\vec{r}_2$.

É importante ressaltar também que esse trabalho é feito pela força resultante. Podemos ter um sistema na presença de diversas forças $\vec{F}_i$ que realizem trabalhos W_i ; a variação de energia cinética nesse caso, representa o trabalho total, ou seja a soma dos trabalhos W_i de cada força $\vec{F}_i$:

$$\Delta T = \sum_i W_i (1 \rightarrow 2)$$

Energia Potencial: A energia potencial num sistema corresponde diretamente a força aplicada.

Existem forças que admitem energia potencial, enquanto outras forças não. Como saber?
Para isso, utilizamos resultados e teoremas do cálculo vetorial. A força num sistema aqui, é entendida como não apenas um vetor, mas um campo vetorial; Um resultado que sai diretamente do cálculo é que campos vetoriais Conservativos admitem um potencial escalar.

Em especial, sempre que o campo vetorial de uma força $\vec{F}$ for conservativo, uma energia potencial $U(\vec{r})$ estará atrelado a essa força. Agora, como saber que uma dada força $\vec{F}$ é conservativa? existem vários jeitos:

- O trabalho realizado pela força não depender do caminho em questão mas apenas dos pontos iniciais e finais.
- O trabalho em todo caminho fechado é zero.
- A força depende apenas da posição e o trabalho independe do caminho.
- O domínio do campo vetorial é simplesmente conexo e seu rotacional nulo.

Temos então que se uma dessas condições forem respeitadas, é possível definir:

$$U(\vec{r}) = -W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) \equiv - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$\vec{r}_0 \rightarrow$ ponto escolhido arbitrariamente
c/ potencial nulo; $U(\vec{r}_0) = 0$

E concomitantemente temos:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Com isso, podemos definir uma grandeza chamada energia mecânica: $E = T + U(\vec{r})$

Sejam agora dois pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$; c/ as expressões para potencial temos:

$$W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_2) = W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) + W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) \Rightarrow W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = \underbrace{W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_2)}_{-U(\vec{r}_2)} - \underbrace{W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1)}_{-U(\vec{r}_1)}$$

$$\Rightarrow W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = - (U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)) = -\Delta U ; \text{ podemos juntar esse resultado agora,}$$

com o teorema do trabalho e energia cinética; onde: $W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = T_2 - T_1 = \Delta T$

$$\Rightarrow \Delta T = -\Delta U \Rightarrow \Delta T + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta \underbrace{(T+U)}_E = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = 0} \quad \text{Onde } \vec{r}_1 \text{ e } \vec{r}_2 \text{ são quaisquer dois pontos sobre a trajetória da partícula.}$$

Ou seja, em um sistema sobre a ação exclusiva de forças conservativas, essa entidade denominada energia mecânica se conserva. Logo a energia total da partícula é conservada.

$\hookrightarrow$ O mesmo resultado é válido para a presença de diversas forças, desde que todas as forças envolvidas sejam conservativas. Nesse caso a energia potencial total $U(\vec{r})$ seria a soma de cada energia potencial atrelada a cada força; $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) + \dots + U_n(\vec{r})$.

Forças não conservativas: No caso de forças não conservativas, não conseguimos determinar um potencial para as mesmas, mas conseguimos determinar o trabalho que elas realizam. Separamos as forças em $\vec{F}_{cons}$ para conservativas e $\vec{F}_{nc}$ para forças não conservativas. Pelo teorema do trabalho-energia cinética temos: $\Delta T = W_{cons} + W_{nc}$

a W_{cons} podemos associar uma variação de energia potencial ΔU ; $\Delta T = -\Delta U + W_{nc}$

$\Rightarrow \Delta T + \Delta U = W_{nc} \Rightarrow \boxed{\Delta E = W_{nc}}$ Logo, a variação de energia mecânica no sistema será justamente o trabalho realizado pelas forças não conservativas.

Energia em sistemas lineares unidimensionais e o método da energia.

Já sabemos que a força se relaciona com a energia potencial por meio do gradiente. Mas isso diz respeito a um problema tridimensional mais complexo. Podemos simplificar um pouco as coisas (e descobrir mais a fundo uma aplicabilidade + geral e complexa); imagine um sistema unidimensional onde por ex a força possui apenas a componente x ; $\vec{F} = F(x)\hat{x}$; isso faz com que o gradiente se resulte em:

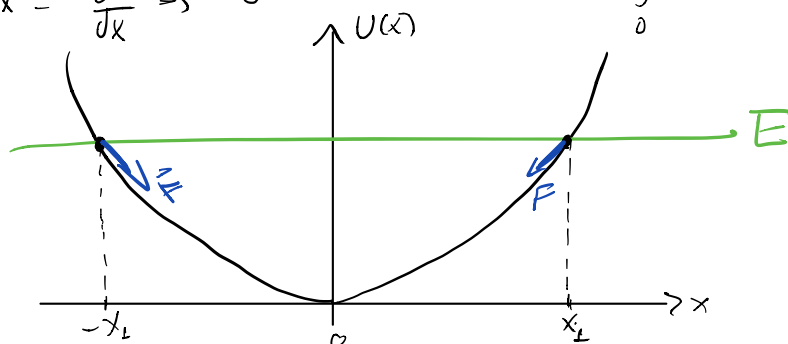
$F = -\frac{dU}{dx}$; sistema c/ energia total: $E = m\dot{x}^2 + U(x) = \text{constante}$, por exemplo.

Podemos olhar o gráfico $U \times x$ e entender qualitativamente o problema, por intermédio dessa abordagem gráfica. Nesse mesmo gráfico conseguimos traçar a energia total do sistema e assim, determinar certos padrões de movimento da partícula, qualitativamente, como por exemplo pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.

Tomemos como primeiro exemplo o sistema massa-mola, onde se atua apenas uma força $F = -kx$; disso:

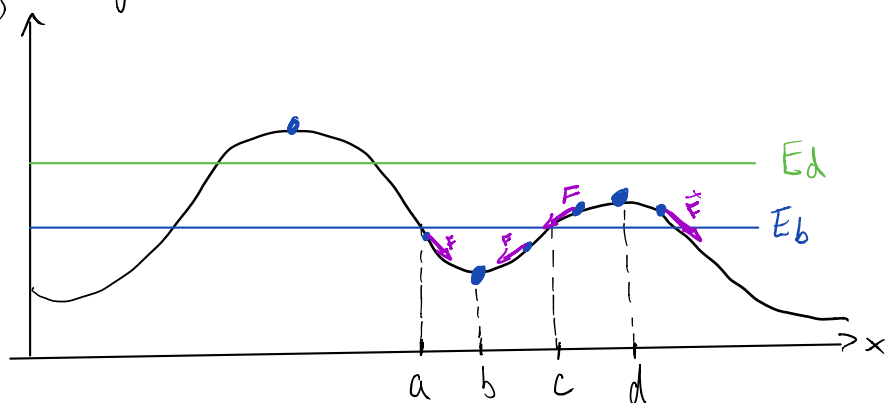
$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow -kx = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = kx dx \Rightarrow U(x) = \int_0^x kx' dx' \Rightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

olhando p/ o gráfico temos:



Pense agora esse sistema, c/ energia total E , isso significa dizer que nossa partícula em questão está definida a ficar oscilando no intervalo $[-x_1, x_1]$; Pq? Bom, ela não pode ir até $|x_1|$ devido a restrição na energia total; se $U(x) = E \Rightarrow T = 0$; Além disso, note que a força impressa na partícula é $F = -\frac{dU}{dx}$; logo $F(x_1)$ aponta para traz, puxando a partícula de volta, o análogo acontece em $-x_1$. Portanto temos que a partícula ficará oscilando em torno de um ponto ($x=0$); esse ponto é um ponto crítico ($\frac{dU}{dx}=0$) que recebe o nome de ponto de equilíbrio

Olhando agora p/ outro $U(x)$:



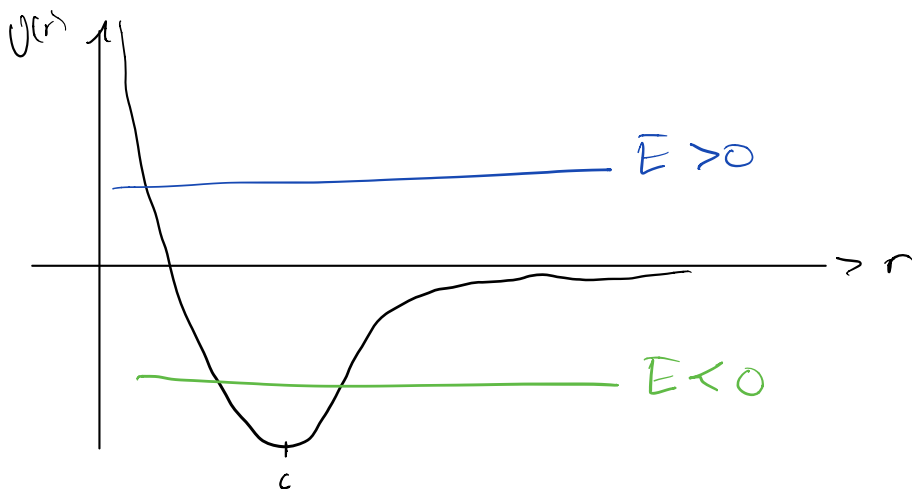
• $\rightarrow$ pontos de equilíbrio

A diferença de ser equilíbrio estável ou instável está caracterizado pela redondezas.

Imagine duas partículas; uma b e outra em d ; com energias respectivas E_b , E_d . Analisando a vizinhança do ponto b temos que a direita, a partícula sofre uma força que a puxa de volta p/ o ponto b . A esquerda do ponto b o mesmo acontece, a partícula sofre uma força que a tende levar a b . Em outras palavras temos que b é um mínimo de $U(x)$; isso caracteriza um ponto de equilíbrio estável.

Pensando agora na partícula em d . A sua direita a força impressa sobre ela a faz tender seu movimento na direção positiva de x ; em contraste, ao lado esquerdo de d a força impressa faz com que o movimento tenda a voltar na escala de x . Em outras palavras temos que d caracteriza um máximo de $U(x)$; dando origem a um ponto de equilíbrio instável.

Um exemplo mais concreto diz respeito a energia potencial de moléculas diatômicas; como função da distância r entre os átomos. Se a energia total do sistema for $E > 0$; os dois átomos possuem energia suficiente p/ se afastarem indefinidamente "rompendo" a molécula. No entanto, se a energia total do sistema for $E < 0$; temos que os átomos estão presos num poço de potencial, ao redor de um equilíbrio estável; isso significa que os átomos vão ficar oscilando essa distância r entre eles, mas nunca vão se soltar, mantendo assim a molécula diatômica.



Método da energia: Podemos nos utilizar da conservação de energia para obter uma solução p/ as equações de movimento: $E = T + U(x) \Rightarrow T = E - U(x) \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - U(x)$

$$\Rightarrow \dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

$\hookrightarrow$ tendo isso; temos que $dt = \frac{dx}{\dot{x}} \Rightarrow t_f - t_i = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\dot{x}}$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} ; \text{ a partir disso inverte-se a relação p/ obter } \underline{x(t)}$$

$\leadsto$ nem sempre vale a pena este método.

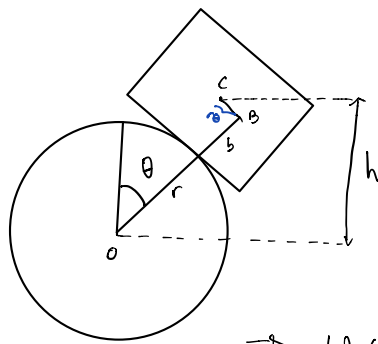
Sistemas Unidimensionais Curvilíneos:

Aqui são tratados de sistemas que muitas vezes acontecem em duas dimensões; mas que necessitam apenas de uma variável para se descrever. Podemos pensar por exemplo; num pêndulo simples no plano xy:

Temos que a energia será dada por: $E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$; temos o seguinte vínculo: $x = l \sin \theta$ e identificando $y = l \cos \theta$ $\dot{s} = l \dot{\theta}$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \Rightarrow U(\theta) = -mgl \cos \theta \text{ e agora podemos realizar toda a análise já vista até aqui, pelo gráfico } U(\theta) \times \theta.$$

Exemplo: Um cilindro rígido de borracha de raio r é mantido fixo tendo seu eixo na horizontal e um cubo de madeira de massa m e lado $2b$ está em equilíbrio sobre o cilindro, com seu centro verticalmente acima do eixo do cilindro e quatro dos seus lados paralelos ao eixo. O cubo não pode deslizar mas pode naturalmente pender de um lado p/ outro. Examine a energia potencial do cubo e determine se para o cubo centrado no cilindro, é estável ou instável.



O sistema pode ser determinado unicamente por θ ou ϕ .

O potencial no cubo assume o potencial gravitacional

$U = mgh$. O comprimento OB mede $r+b$

CB mede $r\theta \rightarrow h = (r+b)\cos\theta + r\theta\sin\theta$

$$\Rightarrow U(\theta) = mgh = mg[(r+b)\cos\theta + r\theta\sin\theta]$$

A fim de determinar as posições de equilíbrio; $\frac{dU}{d\theta} = 0$; $\frac{dU}{d\theta} = mg[r\theta\cos\theta - b\sin\theta]$

Ela se anula p/ $\theta=0$ ponto de equilíbrio. Analisando $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ temos: $\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg(r-b)$ $\neq 0$ em $\theta=0$

De seja, se o cubo for menor que o cilindro ($b < r$) temos um equilíbrio estável; se $b > r$ temos um equilíbrio instável.

Detalhe importante: forças de vínculo não realizam trabalho; isso será discorrido mais a frente em mecânica lagrangeana.

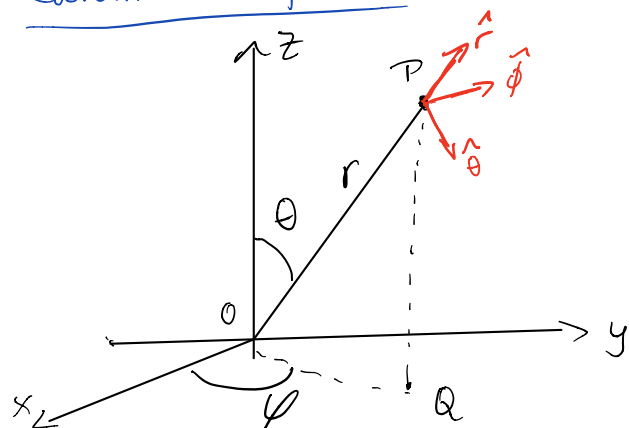
Forças Centrais: Em suma; são forças que apontam para um determinado centro de força. Se a origem é escolhida como o centro de força, elas apontam p/ origem.

Ex: Força Gravitacional, força de Coulomb.

Conservativa
e
Esféricamente Simétrica

$$\vec{F} = F(\vec{r})\hat{r} \rightarrow \text{Força Central.}$$

Coordenadas Esféricas:



$$\begin{cases} x = r \cos\phi \sin\theta \\ y = r \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}$$

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \rightarrow (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$$

Gradiente em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

Então, p/ o caso de uma força central teríamos $\vec{F}(r) = f(r) \hat{r}$; isso nos

leva ao potencial:

$$\vec{F}(r) = - \frac{dU}{dr} \hat{r}$$

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}'$$

Sistema de 2 partículas: Como podemos definir as energias nesse caso?

Cinética: soma das duas energias cinéticas: $T = T_1 + T_2$

Potencial: Ainda sobre a premissa de forças centrais; temos que essas forças (conservativas) dependem não da posição; mas sim da diferença $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$; pois a mesma está sobre a reta que liga as duas partículas.

$$\vec{F}_{1(2)} = - \vec{\nabla}_1 U(r)$$

↳ coordenadas da partícula 1.

logo, temos que a forma funcional de U será: $U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$; Assim temos:

$$T = T_1 + T_2 \rightarrow dT = dT_1 + dT_2$$

$$= F_{1(2)} dr_1 + F_{2(1)} dr_2 \rightsquigarrow 3^{\text{a}} \text{ Lei de Newton: } F_{1(2)} = - F_{2(1)}$$

$$= F_{1(2)} d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$= - \vec{\nabla} U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2); \text{ fazendo } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$= - \vec{\nabla} U(\vec{r}) d\vec{r}$$

E ainda:

$$dT = -dU$$

$$d(T+U) = 0 \rightarrow \boxed{E = T_1 + T_2 + U_{12}}$$

Forças e potenciais de interação são dados de dois em duas partículas.

N partículas: Similar ao anterior, devemos levar em consideração que as forças centrais por estarem sobre a reta que liga duas partículas; podem agir apenas de duas em duas; fazendo com que haja energia potencial referente a interação das partículas de duas em duas. Além disso; $\underline{U_{ij} = U_{ji}}$; $U_{ij} = U(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$

Cinética: $T = T_1 + T_2 + \dots + T_N = \sum_i T_i$

Potencial: $U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \rightarrow$ o fator $\frac{1}{2}$ deve-se ao fato que somamos U_{ij} e U_{ji} que são o mesmo valor.

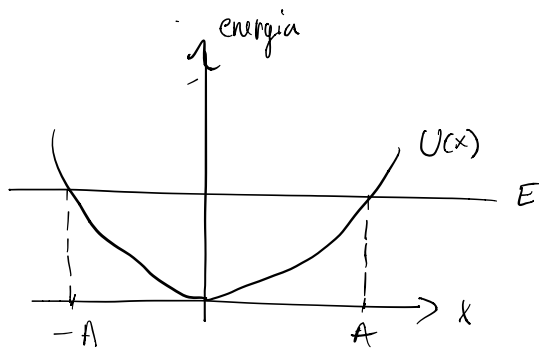
Com isso temos:

$$\boxed{E = \sum_i T_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}}$$

Oscilações:

MHS: Movimento Harmônico Simples: $F(x) = -\overset{20}{\uparrow} kx$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Tipos de Solução:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ x(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \\ x(t) = A \cos(\omega t - \delta) \\ x(t) = \text{Re} [A e^{i(\omega t - \delta)}] \end{cases}$$

→ A dinâmica de um poço de potencial pode ser analisada como a dinâmica de um oscilador harmônico; num pequeno intervalo da posição de equilíbrio (série de Taylor)

$$U(x) \approx U(x_{eq}) + \frac{1}{2} (x - x_{eq})^2 \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right) \Big|_{x=x_{eq}} \quad \begin{matrix} \rightarrow x \in [x_{eq} - \epsilon, x_{eq} + \epsilon] \\ \epsilon \text{ arbitrariamente pequeno} \end{matrix}$$

$\downarrow$
"Constante de mola efetiva" $\equiv K_{eff}$

$K_{eff} > 0 \rightarrow$ parábola c/ concavidade p/ cima (eq. estável)

$K_{eff} < 0 \rightarrow$ parábola c/ concavidade p/ baixo (eq. instável)

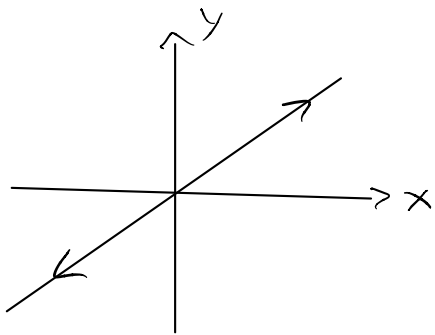
$$F(x) \approx -\frac{dU}{dx} \approx -K_{eff}(x - x_{eq}) \rightarrow \text{Oscilador Harmônico}$$

Oscilador Bidimensional :

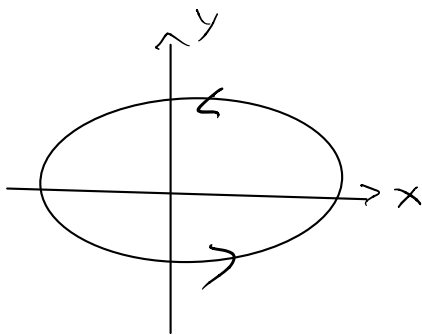
Isotrópico: a constante de proporcionalidade k é a mesma em todas as direções ; $\vec{F} = -k\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t - \delta_x) \\ y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta_y) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x(t) = A_x \cos \omega t \\ y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta) \end{cases} \text{ onde } \delta = \delta_y - \delta_x \text{ fase relativa entre as oscilações de } x \text{ e } y.$$

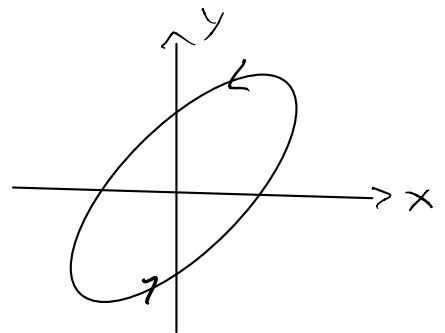
O comportamento da solução em engt depende da fase relativa δ ;



$$\delta = 0$$



$$\delta = \pi/2$$



$$\delta = \pi/4$$

Anisotrópico: constantes de proporcionalidades distintas

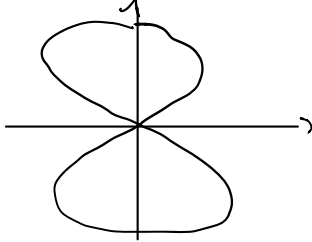
$$\begin{cases} F_x = -K_x x \\ F_y = -K_y y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega_x^2 x \\ \ddot{y} = -\omega_y^2 y \end{cases} \quad \begin{aligned} \omega_x &= \sqrt{\frac{K_x}{m}} \\ \omega_y &= \sqrt{\frac{K_y}{m}} \end{aligned}$$

diferentes frequências p/ cada eixo

Cujas soluções são:

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega_x t) \\ y(t) = A_y \cos(\omega_y t - \delta) \end{cases}$$

Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ for um número racional; é possível definir uma frequência de oscilação do sistema; movimento periódico $\rightarrow$



Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ for irracional; por mais que cada coordenada seja periódica; o movimento como um todo ($\vec{r}(t)$) não será; chamado de Quasiperiódico; os dois períodos são incompatíveis.

Oscilações Amortecidas: Supondo agora o movimento do oscilador harmônico mas com a presença de uma força resistiva $\vec{f} = -b\vec{v}$ temos então a equação do movimento:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow$ Frequência Natural; $\frac{b}{m} = 2\beta \rightarrow$ constante de amortecimento.

Da equação característica associada temos as raízes:

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{onde podemos subdividir em } \underline{3} \text{ diferentes casos:}$$

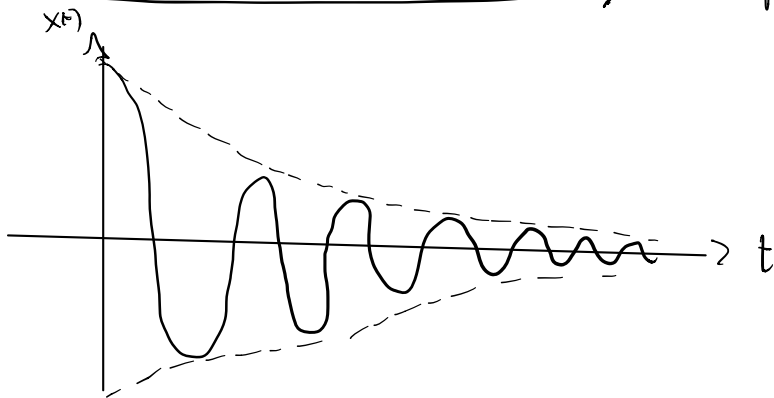
I-) $\beta < \omega_0 \rightarrow$ Amortecimento Fraco / Subamortecimento

$\rightarrow$ a raiz quadrada se torna imaginária: $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i \omega_z$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega_z t} + C_2 e^{-i\omega_z t})$$

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_z t - \delta)$$

$\rightarrow$ o movimento vai sendo cada vez mais amortecido pelo termo $e^{-\beta t}$



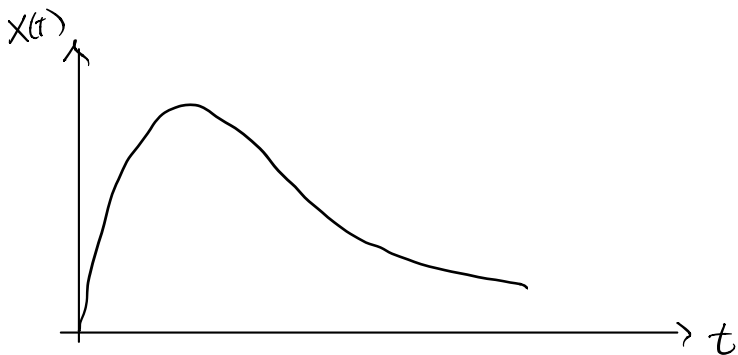
II-) $\beta > \omega_0 \rightarrow$ Amortecimento Forte / Superamortecimento

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

$\hookrightarrow$ Movimento tão amortecido que não permite a oscilação de fato.

III-) $\beta = \omega_0$ Amortecimento Crítico

Nesse caso a solução fica: $x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t \cdot e^{-\beta t}$



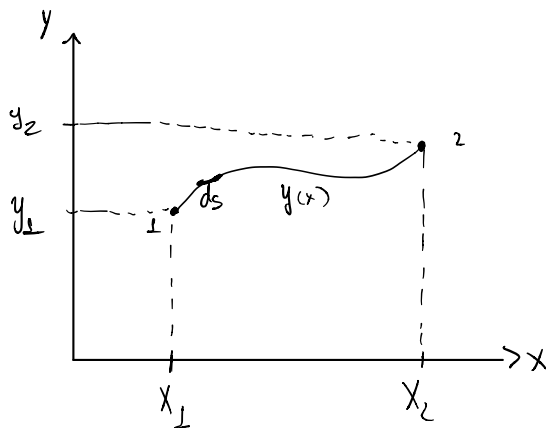
Temos resumidamente então:

Amortecimento	β	Parâmetro de decaimento
Sub	$\beta < \omega_0$	β
Crítico	$\beta = \omega_0$	β
Super	$\beta > \omega_0$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Cálculo das Variações:

↳ determinação de mínimos e máximos de quantidades expressas como integrais.

EX: O menor caminho entre dois pontos $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = y'(x) dx \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad \text{logo o comprimento total do caminho}$$

é:

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

O problema então se resume a encontrar uma função $y(x)$ que torne L um mínimo; como se faz isso?

É algo um pouco mais complicado do que o "normal". Esses problemas de maneira geral

assumem a forma:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx$$

→ Problema Variacional

onde $y(x)$ é uma curva que conecta os pontos (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \rightarrow y(x_1) = y_1; y(x_2) = y_2$

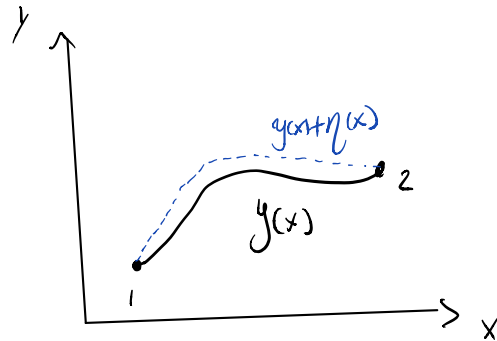
Ou seja, dentro de todas as curvas que realizam isso, devemos encontrar aquela que torne S um mínimo. (pelo menos estacionária)

Digamos que a solução correta p/ o problema é $y = y(x)$

Com isso é conveniente escrever a curva "errada" como:

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) \rightarrow$$

onde $\eta(x)$ é a diferença entre essas curvas, note que devemos ter $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$



Com isso, a integral tomada em Y deve ser maior independentemente do quão próxima esteja de $y(x)$. Podemos então redefinir:

$$Y(x) = y(x) + \overset{\text{parâmetro}}{\alpha} \cdot \eta(x)$$

$$\underline{S \rightarrow S(\alpha)}$$

Logo, a condição para que S seja um mínimo p/ $y(x)$ devemos ter que $S(\alpha)$ é um mínimo quando $\alpha = 0 \rightarrow$ problema tradicional

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx ; \quad \frac{\partial f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)}{\partial \alpha} = \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0$$

↳ integrando por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \underbrace{\left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Substituindo temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \rightarrow \underline{\text{Equação de Euler-Lagrange}}$$

Podemos então voltar ao exemplo anterior onde $f = \sqrt{1+y'^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

$$\Rightarrow y'^2 = C^2(1+y'^2) \rightarrow y'^2 = \text{constante} \rightarrow \boxed{\text{Reta}}$$

Equação de Lagrange:

$\mathcal{L} \rightarrow$ Função Lagrangiana: $\boxed{\mathcal{L} \equiv T - U}$

$q \rightarrow$ coordenada generalizada

$\dot{q} \rightarrow$ Velocidade generalizada

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \rightarrow$ "Força Generalizada"

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \rightarrow$ "Momento Generalizado"

Princípio de Hamilton: O caminho real que uma partícula percorre é aquele tal que sua ação (S) é estacionária ao longo do caminho

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Vimos que essa função $\mathcal{L}$ obedece a equação de Euler-Lagrange então devemos ter

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n$$

→ Equação de Lagrange assume a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas

→ elimina forças de vínculo

Uma coisa curiosa é que as forças e momentos generalizados não precisam necessariamente possuir dimensões de força e momento.

Ex: Digamos que temos uma partícula movendo-se num campo de força conservativo ($\exists$ um potencial); vamos derivar as equações de Lagrange utilizando coordenadas cartesianas e polares.

Cartesianas: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y)$

$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \equiv a_x m$; o mesmo p/ y então temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Leftrightarrow F_x = m\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \Leftrightarrow F_y = m\ddot{y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underline{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Polares: Lembrando que $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ temos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r, \phi)$$

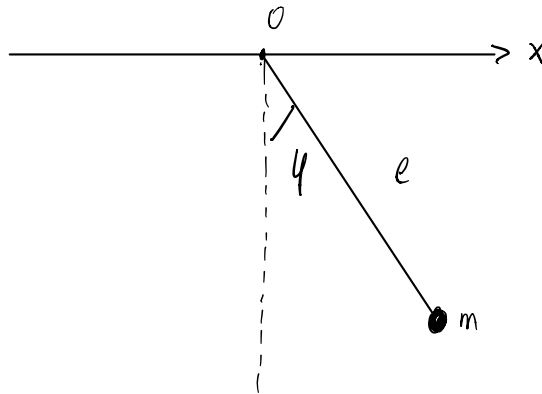
$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \Rightarrow \underbrace{mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}}_{F_r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \Rightarrow \underline{F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \Rightarrow - \frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (\overbrace{m r^2 \ddot{\phi}}^Z) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{dL}{dt} \downarrow$$

$= r F_\phi$
 $= \tau \text{ torque}$

$Z \rightarrow$ Variação do momento angular

Ex Vínculo: Pêndulo Simples



É possível utilizar coordenadas cartesianas x, y o vínculo é $x^2 + y^2 = l^2$; podendo fazer tudo em função de apenas uma variável x ou y . Entretanto, é mais prático utilizar como coordenada generalizada ϕ . $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$; $U = mgh$ onde $h = l(1 - \cos\phi)$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos\phi) \quad \text{temos então:}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \Rightarrow - mgl \sin\phi = \frac{d}{dt} (m l^2 \ddot{\phi}) = \underbrace{m l^2}_{\text{momento de inércia}} \ddot{\phi} \sim \text{aceleração}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{torque exercido pela gravidade sobre o pêndulo}}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = I \alpha} \rightarrow \begin{matrix} 2^{\text{a}} \text{ lei de Newton} \\ \text{para rotações} \end{matrix}$$

→ Um conjunto de coordenadas generalizadas é dito "Natural" se $q_1, \dots, q_n$ não se relacionam com as coordenadas cartesianas $\vec{r}_x$ por meio do tempo t .

Sistemas Holonômicos: Um sistema de N graus de liberdade que é descrito precisamente por N coordenadas generalizadas.

↪ Um Vínculo diminui os graus de liberdade de um sistema.

↳ número de coordenadas que variam independentemente das outras coordenadas.

Vínculos e Forças de Vínculo:

Suponhamos agora que a geometria do problema ou outra característica imponha um vínculo entre essas coordenadas. Dado primeiramente por algo do tipo:

$$g(q_i, t) = 0 \rightarrow \text{Equação de Vínculo}$$

↳ Vínculo holonômico

Equações do tipo $g(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ dependem das velocidades generalizadas e são ditas não-holonômicas. No entanto, podem haver casos em que há dependência da velocidade e seja um vínculo holonômico.

Ex: $\sum_i A_i \dot{q}_i + B = 0$ p/ o caso em que: $A_i = \frac{\partial g}{\partial \dot{q}_i}$
 $B = \frac{\partial g}{\partial t}$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dg}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{g(q_i, t) - C = 0}_{\text{Holonômico}}$$

Exemplos:

- partícula no cone; $\frac{r}{z} = \tan \alpha \Rightarrow \underline{g(r, z) = r - z \tan \alpha = 0}$

- pêndulo esférico acoplado a um dispositivo que gira o conjunto; $\dot{\phi} = \omega \rightarrow g(\dot{\phi}, t) = \dot{\phi} - \omega = 0$

que pode ser reescrito como $\underline{g(\phi, t) = \phi - \omega t = 0}$.

Equação do Movimento:

Pensando em um sistema de duas coordenadas:

$$g(q_1, q_2) = 0$$

Na dedução teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = 0 \quad \xrightarrow{\partial g}$$

onde $q_i(t, \alpha) = q_i(t) + \alpha \eta_i(t)$; temos então:

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \underline{\frac{\partial g}{\partial q_1} \eta_1 + \frac{\partial g}{\partial q_2} \eta_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) \eta_2 \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \eta_1 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) \frac{\eta_2}{\eta_1} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \eta_1 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) \left(- \frac{\partial g / \partial q_1}{\partial g / \partial q_2} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_1} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_2} \right)^{-1} = \underline{-\lambda}$$

↗ multiplicador
de Lagrange
podemos ter $\lambda = \lambda(t)$

Com isso temos então as seguintes equações de movimento:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \lambda(t) \cdot \frac{\partial g}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} + \lambda(t) \cdot \frac{\partial g}{\partial q_2} = 0 \\ g(q_1, q_2) = 0 \end{cases}$$

Vários Vínculos:

Um sistema com K-vínculos; $g_k(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0 \\ g_k(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \end{cases}$$

→ Um multiplicador de Lagrange λ_k para cada vínculo g_k

→ Para cada coordenada q_j , temos até K termos no somatório

$$\sum_K \lambda_K \frac{\partial g}{\partial q_j} \quad \text{associado à equação p/ } \ddot{q}_j$$

definimos isso como uma força generalizada / força de vínculo Q_j :

$$Q_j \equiv \sum_K \lambda_K \cdot \frac{\partial g}{\partial q_j}$$

↳ forças responsáveis pela restrição do movimento da partícula imposta pelo vínculo

↳ permite determinar as forças do vínculo

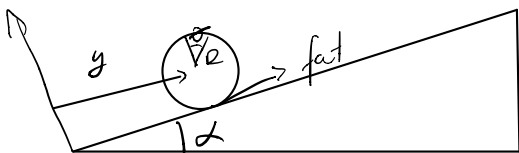
Exemplos:

I-) Disco em um plano inclinado:

Coord. generalizadas: $y \rightarrow$ translação do CM plano acima

$\theta \rightarrow$ ângulo de rotação do disco em relação à normal do plano.

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0$$



$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgy \sin \alpha \\ g(y, \theta) = y - R\theta = 0 \end{cases}$$

logo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial y} = -Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 - I\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \\ -I\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \\ y - R\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow M\ddot{y} + Mg \sin \alpha + I \frac{\ddot{y}}{R^2} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{y} + Mg \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = - \frac{Mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = - \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = - \frac{2g \sin \alpha}{3R} \quad \lambda = \frac{Mg \sin \alpha}{3}$$

$$\begin{cases} Q_y = \lambda \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{Mg \sin \alpha}{3} \\ Q_\theta = \lambda \frac{\partial y}{\partial \theta} = - \frac{Mg R \sin \alpha}{3} \end{cases}$$

II-) Partícula em uma esfera: Sob que condições a partícula perde o contato com o hemisfério?

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - mgr \cos \theta \\ g(r, \theta) = r - a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m r \ddot{\theta}^2 - mg \cos \theta - m \ddot{r} + \lambda = 0 \\ mg r \sin \theta - m r^2 \ddot{\theta} - 2 m \dot{r} \dot{r} \dot{\theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \rightarrow \mathcal{L}_\phi \equiv \text{cte} \\ r - a = 0 \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m a \ddot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \\ mg a \sin \theta - m a^2 \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta}{a} \rightarrow \int \dot{\theta} \ddot{\theta} \rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = - \frac{g \cos \theta}{a} + \frac{g}{a}$$

$$\Rightarrow ma \left(\frac{-2g \cos \theta}{a} + \frac{2g}{a} \right) - mg \cos \theta + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = mg (3 \cos \theta - 2)$$

A partícula escapa do hemisfério quando o vínculo é zero ; ou seja quando $\lambda=0$; isso ocorre quando $\cos\theta = \frac{2}{3}$

Partícula no Campo Eletromagnético :

Pensando no caso em que temos U dependendo da velocidade generalizada:

$$U = U(q, \dot{q}, t) \Rightarrow -\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

Definimos a força generalizada a coordenada generalizada j

$$Q_j \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\rightarrow U = U(q, \dot{q}) \rightarrow \begin{matrix} \text{Potencial} \\ \text{Generalizado} \end{matrix}$$

Seja ϕ potencial elétrico e $\vec{A}$ potencial magnético

$$U = q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{L} = T - U = T - q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}}$$

Com momento generalizado

$$\underline{P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i}$$